Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 23 maggio 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{e^{2x}}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Osserviamo che la funzione esponenziale non si annulla mai, quindi la funzione è definita in tutta la retta reale. La funzione è inoltre derivabile (e quindi continua) in tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto di funzioni derivabili. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = 0$$

per gerarchia di inifiniti. La funzione ha quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to +\infty$. Controlliamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} e^{-2x} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo. Studiamo ora la monotonia calcolando la derivata.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^{2x} - (x-1)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(1-2x+2)}{e^{4x}} = \frac{3-2x}{e^{2x}}.$$

Dato che $e^{2x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che

$$f'(x) > 0 \iff 3-2x > 0 \iff 3 > 2x \iff x < \frac{3}{2}.$$

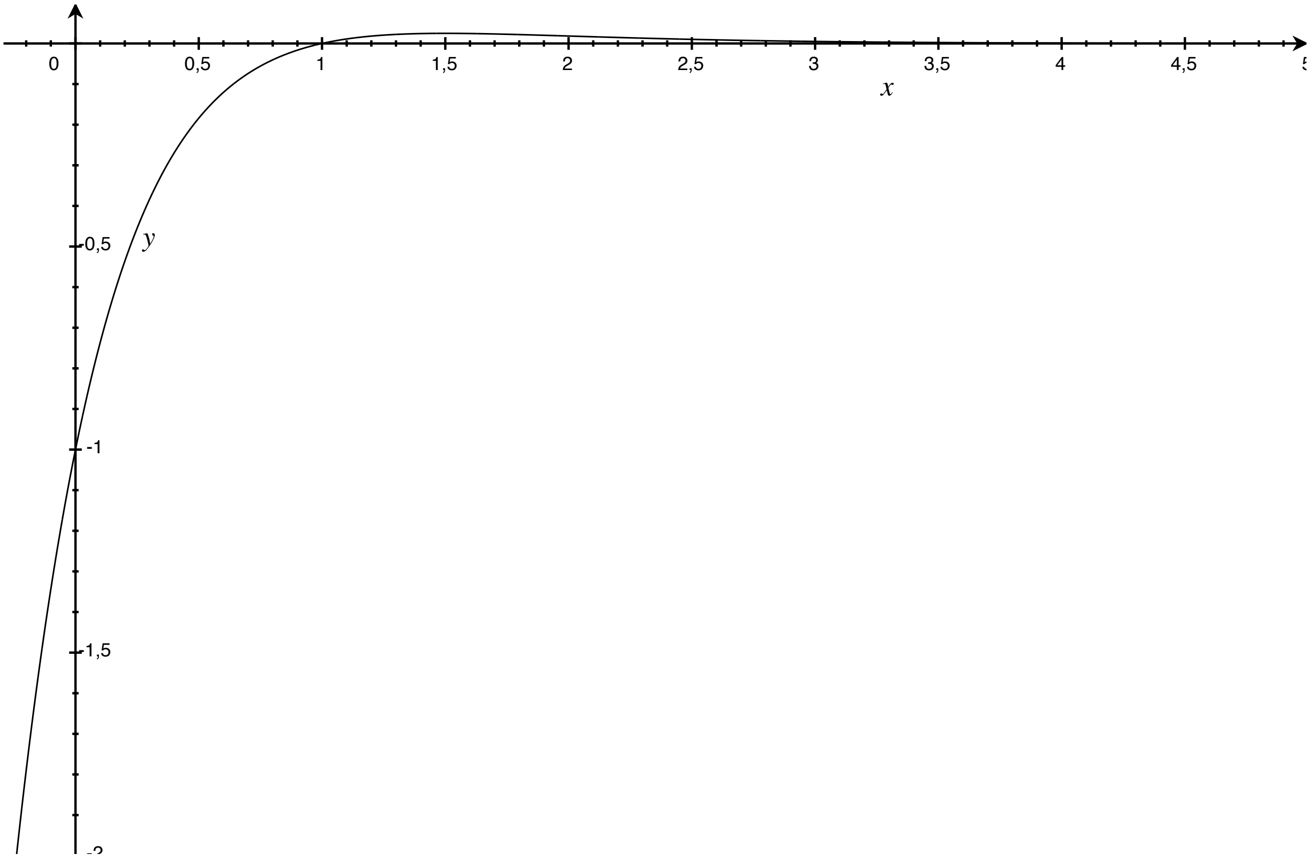
La funzione è strettamente crescente sulla semiretta $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ e strettamente decrescente sulla semiretta $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Il punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$ è di massimo. Il massimo della funzione vale $f(\frac{3}{2}) = \frac{\frac{3}{2}-1}{e^3} = \frac{1}{2e^3}$ mentre la funzione non ha minimo perché non è limitata inferiormente.
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-2e^{2x} - (3-2x)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(-2-6+4x)}{e^{4x}} = \frac{4x-8}{e^{2x}}.$$

Avremo quindi che

$$f''(x) > 0 \iff 4x-8 > 0 \iff x > 2.$$

La funzione è quindi strettamente concava in $(-\infty, 2]$, strettamente convessa in $[2, +\infty)$ e il punto di ascissa $x = 2$ è di flesso.



Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right|$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$.

Soluzione

La serie è chiaramente a termini positivi, data la presenza del valore assoluto. Poniamo

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right|$$

e utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione seno

$$\sin t = t + o(t^2), \qquad t \to 0$$

con la sostituzione $t = \frac{1}{n}$, $n \to +\infty$, ottenendo

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Osserviamo ora che se $0 < \alpha < 1$ risulta $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = -\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha}\left(-1 + o(1)\right)$$

e di conseguenza

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^\alpha} \left|-1 + o(1)\right| = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{2}{3}}} \left|-1 + o(1)\right|.$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{2}{3}}}$ otteniamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Dato che stiamo considerando il caso $\alpha < 1$ avremo che $\alpha - \frac{2}{3} < 1 - \frac{2}{3} < 1$, di conseguenza $\sum\limits_n b_n$ diverge positivamente e, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum\limits_n a_n$

diverge positivamente. Consideriamo ora il caso $\alpha > 1$. Questa volta avremo che $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1 + o(1)\right)$$

e di conseguenza

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right| = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\left|1 + o(1)\right| = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\left|1 + o(1)\right|.$$

Ora scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ e, poiché $\sum_n b_n$ diverge positivamente, ragionando come prima, otteniamo che anche $\sum_n a_n$ diverge positivamente. Nel caso $\alpha = 1$ invece si cancella il primo termine dello sviluppo di Taylor e si ottiene

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right| = n^{\frac{2}{3}} \left|o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = \left|o\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right)\right|.$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dato che $\sum_n b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_n a_n$ converge.
Riassumendo, la serie data converge solo per $\alpha = 1$ e diverge positivamente per tutti gli altri valori di α.

Esercizio 3 Trovare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^x \left((x-y)^2 + y^2\right)$$

e determinare estremi superiore e inferiore di f.

Soluzione

Calcoliamo le derivate parziali della funzione

$$f_x = e^x \left((x-y)^2 + y^2\right) + e^x 2(x-y) = e^x(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y)$$

$$f_y = e^x \left(-2(x-y) + 2y\right) = e^x(-2x + 4y) = 2e^x(2y - x)$$

Il gradiente si annulla quando

$$\begin{cases} e^x(x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 2y) = 0 \\ 2e^x(2y - x) = 0 \end{cases}$$

Dato che $e^x \neq 0$ per ogni x, dalla seconda equazione otteniamo $x = 2y$. Dividiamo la prima equazione per e^x e sostituiamo questo risultato nella prima ottenendo

$$4y^2 - 4y^2 + 2y^2 + 4y - 2y = 0 \iff 2y^2 + 2y = 0 \iff y(y+1) = 0 \iff y = 0 \text{ oppure } y = -1.$$

Ricordando che $x = 2y$, otteniamo i punti stazionari $(0, 0)$ e $(-2, -1)$.
Osserviamo ora che $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e che $f(0, 0) = 0$, quindi il minimo di f vale 0. Considerando la restrizione di f all'asse x, descritto dalla curva $\gamma(t) = (t, 0)$ otteniamo

$$g(t) = f(t, 0) = e^t t^2.$$

Dato che

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$$

otteniamo che $\sup(f) = +\infty$.