

Analisi Matematica

Pisa, 23 maggio 2024

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{e^{2x}}$$

determinandone insieme di definizione, continuità e derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore o massimo e minimo. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locali, gli intervalli di convessità e concavità e i punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

Osserviamo che la funzione esponenziale non si annulla mai, quindi la funzione è definita in tutta la retta reale. La funzione è inoltre derivabile (e quindi continua) in tutto \mathbb{R} essendo prodotto di funzioni derivabili. Vediamo i limiti.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^{2x}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = 0$$

per gerarchia di infiniti. La funzione ha quindi l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Controlliamo l'eventuale presenza di un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} e^{-2x} = 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

quindi non c'è l'asintoto obliquo. Studiamo ora la monotonia calcolando la derivata.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^{2x} - (x-1)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(1-2x+2)}{e^{4x}} = \frac{3-2x}{e^{2x}}.$$

Dato che $e^{2x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che

$$f'(x) > 0 \iff 3-2x > 0 \iff 3 > 2x \iff x < \frac{3}{2}.$$

La funzione è strettamente crescente sulla semiretta $(-\infty, \frac{3}{2}]$ e strettamente decrescente sulla semiretta $[\frac{3}{2}, +\infty)$. Il punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$ è di massimo. Il massimo della funzione vale $f(\frac{3}{2}) = \frac{\frac{3}{2}-1}{e^3} = \frac{1}{2e^3}$ mentre la funzione non ha minimo perché non è limitata inferiormente.

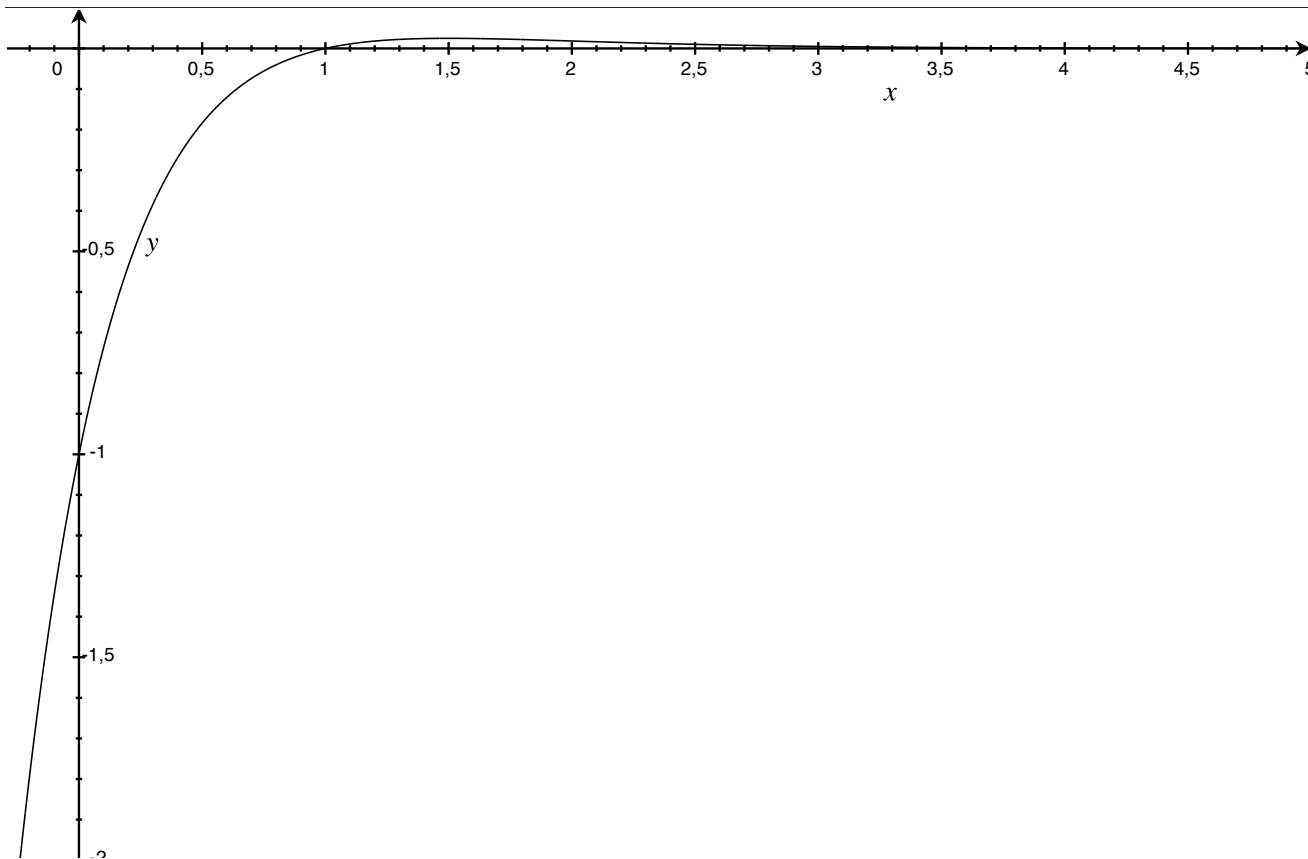
Vediamo ora la convessità calcolando la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-2e^{2x} - (3-2x)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(-2-6+4x)}{e^{4x}} = \frac{4x-8}{e^{2x}}.$$

Avremo quindi che

$$f''(x) > 0 \iff 4x-8 > 0 \iff x > 2.$$

La funzione è quindi strettamente concava in $(-\infty, 2]$, strettamente convessa in $[2, +\infty)$ e il punto di ascissa $x = 2$ è di flesso.



Esercizio 2 Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n \geq 1} n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right|$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Soluzione

La serie è chiaramente a termini positivi, data la presenza del valore assoluto. Poniamo

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right|$$

e utilizziamo lo sviluppo di Taylor della funzione seno

$$\sin t = t + o(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

con la sostituzione $t = \frac{1}{n}$, $n \rightarrow +\infty$, ottenendo

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Osserviamo ora che se $0 < \alpha < 1$ risulta $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = -\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} (-1 + o(1))$$

e di conseguenza

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n^\alpha} |-1 + o(1)| = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{2}{3}}} |-1 + o(1)|.$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{\alpha - \frac{2}{3}}}$ otteniamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Dato che stiamo considerando il caso $\alpha < 1$ avremo che $\alpha - \frac{2}{3} < 1 - \frac{2}{3} < 1$, di conseguenza $\sum_n b_n$ diverge positivamente e, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_n a_n$

diverge positivamente. Consideriamo ora il caso $\alpha > 1$. Questa volta avremo che $\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quindi

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}(1 + o(1))$$

e di conseguenza

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} |1 + o(1)| = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} |1 + o(1)|.$$

Ora scegliamo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ e, poiché $\sum_n b_n$ diverge positivamente, ragionando come prima, otteniamo che anche $\sum_n a_n$ diverge positivamente. Nel caso $\alpha = 1$ invece si cancella il primo termine dello sviluppo di Taylor e si ottiene

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

quindi

$$a_n = n^{\frac{2}{3}} \left| \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| = n^{\frac{2}{3}} \left| o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = \left| o\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\right) \right|.$$

Scegliendo $b_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ otteniamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dato che $\sum_n b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico, anche $\sum_n a_n$ converge.

Riassumendo, la serie data converge solo per $\alpha = 1$ e diverge positivamente per tutti gli altri valori di α .

Esercizio 3 Trovare i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^x ((x - y)^2 + y^2)$$

e determinare estremi superiore e inferiore di f .

Soluzione